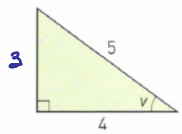
Matematik 4 - Prov 1 - 13:e September, 2013

Journalanteckningstitel

Frågor som innehåller förmågorna på E-nivå. Om du siktar på E försök att göra alla. Om du vill ha högre betyg välj minst 5.

1

Bestäm med hjälp av figuren sin v och tan v.



$5^2 = 4^2 + b^2$

$b = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$

$\sin v = \frac{mot}{hyp} = \frac{3}{5}$

$\tan v = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{mot}{hyp}}{\frac{när}{hyp}}$

$\frac{mot}{\cancel{hyp}} \cdot \frac{\cancel{hyp}}{när} = \frac{3}{4}$

2

Visa att

$$\left(\sqrt{2} - \cos v\right)\left(\sqrt{2} + \cos v\right) = 1 + \sin^2 v$$

$(\sqrt{2})^2 - \cos^2 v = 1 + \sin^2 v$

$2 - (1 - \sin^2 v) =$

$2 - 1 + \sin^2 v =$

$1 + \sin^2 v = 1 + \sin^2 v$

VL = HL v.s.v

3

Antag att du vet att $\sin 35° \approx 0{,}57$ och $\cos 35° \approx 0{,}82$.

Visa hur du bestämmer följande.

a) $\sin 145°$ b) $\cos 145°$

a) $\sin(180 - 35) = \sin 180 \cos 35 - \sin 35 \cos 180$

$= 0 + 0.57(+1)$

$= 0{,}57$

4

Ekvationen $\cos x = 1$ har lösningen $x = 0° + n \cdot 360°$. Ange alla lösningar i intervallet $0° \le x \le 1\,000°$.

$n = 0$ $x = 0$

$n = 1$ $x = 360$

$n = 2$ $x = 720$

~~$n = 3$ $x = 1080$~~

5

För en vinkel x gäller

$\sin x = 0{,}6$ och $\cos x = 0{,}8$

Bestäm följande värden utan att först bestämma x.

a) $\sin 2x$

b) $\cos 2x$

a) $2 \sin x \cos x$

$2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8$

0.96

b) $\cos^2 v - \sin^2 v$

$0.8^2 - 0.6^2$

0.28

6

P Q

Kvadraten på ett heltal är udda. Visa att talet är udda. Använd indirekt bevis med omvänd negerad implikation.

$\neg Q \Rightarrow \neg P \;\therefore\; P \Rightarrow Q$

låt $r = 2k$ dvs jämn

$r^2 = 4k^2$ dvs att r har en faktor av två dvs jämn

slutsats: om n^2 är udda så är n^2 udda

7

Bevisa att

a) summan av ett udda tal och ett jämnt tal är udda

b) produkten av två udda heltal är udda.

a) låt $r = 2k+1$ och $s = 2k$

$r+s = 2k+1+2k$

$r+s = \underbrace{4k+1}_{\text{gör summan udda}}$

b) låt $r = 2k+1$ och $s = 2k+1$

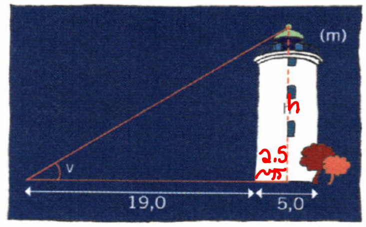
$r \cdot s = (2k+1)^2$

$= 4k^2 + 4k + 1$

$= 4(k^2+k) \underbrace{+1}_{\text{gör produkten udda}}$

8

För att beräkna höjden på Hanö fyr mätte en grupp elever upp sträckan 19,0 m på marken enligt figur. Fyrens diameter mättes till 5,0 m och vinkeln v uppskattades till 37° med hjälp av en stor gradskiva och en käpp. Beräkna fyrens höjd h.



$\tan 37 = \dfrac{h}{19+2,5}$

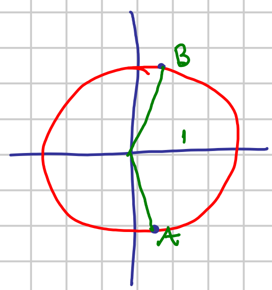
$h = 21.5 \tan 37 = 16.2\text{m}$

Frågor som innehåller förmågorna på C-nivå. Välj minst 5. Välj fler om du siktar på C.

9

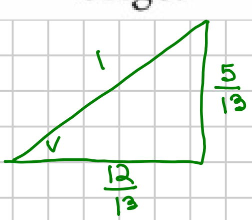
a) Visa att punkterna $A = \left(\dfrac{4}{5}, -\dfrac{3}{5}\right)$ och $B = \left(\dfrac{12}{13}, \dfrac{5}{13}\right)$ ligger på enhetscirkeln.

b) Bestäm vinkeln AOB där O är origo.



$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$

B



$\left(\dfrac{12}{13}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{13}\right)^2 \overset{?}{=} 1$

$\dfrac{144}{169} + \dfrac{25}{169} \overset{?}{=} 1$

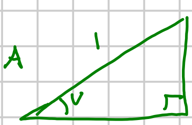
$\dfrac{169}{169} = 1 = 1$ VSV

$\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \left(\dfrac{-3}{5}\right)^2 \overset{?}{=} 1$

$\dfrac{16}{25} + \dfrac{9}{25} \overset{?}{=} 1$

$\dfrac{25}{25} = 1 = 1$ VSV

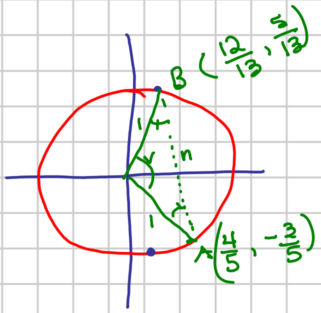
A

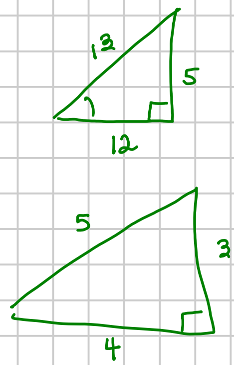


$-\dfrac{3}{5}$

$\dfrac{4}{5}$

b)





$\sin v_1 = \frac{5}{13}$

$v_1 = \sin^{-1}\left(\frac{5}{13}\right) = 22.619$

$\sin v_2 = \frac{3}{5}$

$v_2 = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = 36.87$

$v_1 + v_2 \approx 59.5°$

10

Lös ekvationen

$2\cos\frac{3v}{2} + \sqrt{3} = 0$,

$\cos\frac{3v}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{3v}{2} = \pm 150 + 360n$

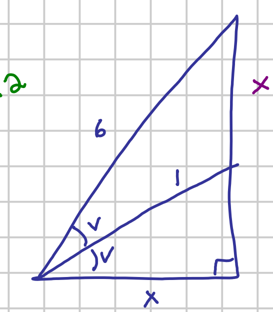
$v = \pm \frac{\cancel{150}^{50} \cdot 2}{\cancel{3}} + \cancel{360}^{120} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} n$

$v = \pm 100 + 240n$

11

I den rätvinkliga triangeln ABC är hypotenusan $AB = 6{,}0$ cm. Bisektrisen till vinkeln $A = 1{,}0$ cm. Bestäm triangelns spetsiga vinklar.

82.8   7.2



$\cos v = \frac{x}{1}$

$\cos 2v = \frac{x}{6}$

$x = 6\cos 2v$

$\cos v = 6\cos 2v$

$\cos v = 6(2\cos^2 v - 1)$

$12\cos^2 v - \cos v - 6 = 0$

$6 \cdot 12 = 72$

$8 \cdot 9 = 72$

$12\cos^2 v - 9\cos v + 8\cos v - 6 = 0$

$3\cos v(4\cos v - 3) + 2(4\cos v - 3) = 0$

$(4\cos v - 3)(3\cos v + 2) = 0$

$\cos v = \frac{3}{4}$

$v = 41°$

$\cos v = -\frac{2}{3}$

~~$v = 131$~~

orimligt

$2v = 82{,}8$

$90 - 82{,}8 = 7{,}2°$

spetsig a vinkeln

låt $t = \cos v$

$12t^2 - t - 6 = 0$

$t^2 - \frac{1}{12}t - \frac{1}{2} = 0$

$t = \frac{1}{24} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{24}\right)^2 + \frac{1}{2}}$

$t = 0{,}75$

$\cos v = 0.75$

$v = 41{,}4$

$2v = 82{,}8$

$90 - 82{,}8 = 7{,}2°$

12

Lös ekvationen $\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$.

$\cancel{1} - \cos^2 x - \cos x - \cancel{1} = 0$

$\cos x(\cos x + 1) = 0$

$\cos x = 0 \qquad \cos x = -1$

$x = \pm 90 + 360n \qquad x = 180 + 360n$

eller $90 + 180n$

Krävs för högre betyg (mot A) för att visa förståelse

13

Skriv

a) sin 3*v* som ett uttryck i sin *v*.

b) cos 3*v* som ett uttryck i cos *v*.

a) $\sin(2v+v) = \sin 2v\cos v + \sin v\cos 2v$
$= 2\sin v\cos^2 v + \sin v(1 - 2\sin^2 v)$
$= 2\sin v(1 - \sin^2 v) + \sin v - 2\sin^3 v$
$= 2\sin v - 2\sin^3 v + \sin v - 2\sin^3 v$
$= 3\sin v - 4\sin^3 v$

b) $\cos(2v+v) = \cos 2v\cos v - \sin 2v\sin v$
$= (2\cos^2 v - 1)\cos v - 2\sin^2 v\cos v$
$= 2\cos^3 v - \cos v - 2(1 - \cos^2 v)\cos v$
$= 2\cos^3 v - \cos v - (2 - 2\cos^2 v)\cos v$
$= 2\cos^3 v - \cos v - 2\cos v + 2\cos^3 v$
$= 4\cos^3 v - 3\cos v$

14

Bevisa att $\sqrt{3}$ är ett irrationellt tal.

P q

$\neg Q \Rightarrow \neg P$

anta att $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ där a & b är heltal bråket kan ej förkortas

$3 = \frac{a^2}{b^2}$ vilket ger $3b^2 = a^2$

a^2 och a är delbar med 3

sätter $a = 2k$ ger $2b^2 = 4k^2$

$b^2 = 2k^2$

så b måste vara delbart med 2 vilket är en motsägelse

därför måste $\sqrt{3}$ vara irrationellt

15

Bestäm värdet på uttrycket

$\cos 2x$ om $\sin x + \cos x = -\frac{1}{5}$,

$135° \le x \le 180°$

$\cancel{\sin^2 x} + 2\cos x\sin x + \cancel{\cos^2 x} = \frac{1}{25} - 1$

$\sin 2x = \frac{-24}{25}$

$\cos^2 2x + \sin^2 2x = 1$

$\cos 2x = \sqrt{1 - \sin^2 2x}$

$= \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2}$

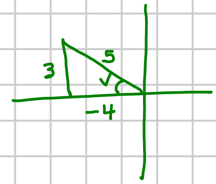
$= \sqrt{\frac{25^2}{25^2} - \frac{24^2}{25^2}}$

$= \sqrt{\frac{49}{25^2}} = \frac{7}{25}$

(16)

Beräkna exakt 3sin 2*v* + 4cos 2*v* då
$90° < v < 180°$ och $\tan v = -\frac{3}{4}$

om tan v är negativ och
vinkeln ligger i kvadrant II
så blir sin v pos o cos v neg



$\sin v = \frac{3}{5}$

$\cos v = \frac{-4}{5}$

$3 \cdot 2\sin v\cos + 4\cdot(\cos^2 v - \sin^2 v)$

$6 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{-4}{5}\right) + 4\left[\left(\frac{-4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right]$

$\frac{6 \cdot 3 \cdot (-4)}{25} + 4\left(\frac{16-9}{25}\right)$

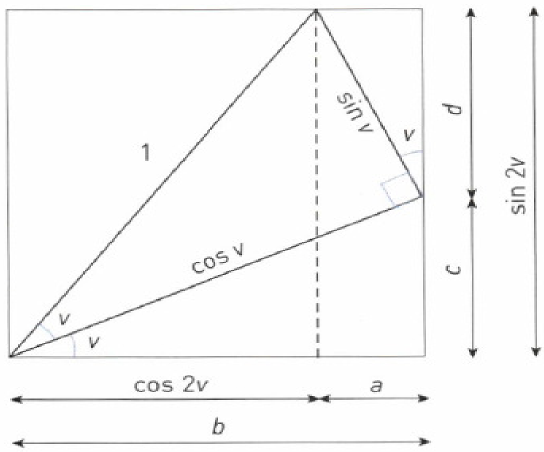
$-\frac{72}{25} + 4 \cdot \frac{7}{25}$

$-\frac{44}{25}$

Välj en om du siktar på A. Tänk på att den måste vara lätt att följa din resonemang.

17

Med hjälp av figuren kan formlerna för dubbla vinkeln ”plockas fram”. Visa hur man gör.



De sträckor som är märkta $\cos 2v$ och $\sin 2v$ är kateter i en triangel med hypotenusan 1 och vinkel $2v$. Den lutande triangeln har hypotenusa 1 och vinkel $v \Rightarrow$ kateterna har längderna $\sin v$ och $\cos v$. Den nedre triangeln har hypotenusa $\cos v$ och spetsvinkel v. Kateterna är $b = \cos v \cdot \cos v = \cos^2 v$ och $c = \cos v \cdot \sin v$.
Den lilla triangeln i övre hörnet har hypotenusa $\sin v$ och spetsvinkel v. Detta ger kateterna $a = \sin v \cdot \sin v = \sin^2 v$ och $d = \sin v \cdot \cos v$

$\cos 2v = b - a = \cos^2 v - \sin^2 v$
$\sin 2v = c + d = \cos v \cdot \sin v + \sin v \cdot \cos v = 2 \sin v \cos v$

18

Visa att

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

kan skrivas

$$\sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$$

$$\frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}$$

$$\frac{\sin x \cos h - \sin x}{h} + \frac{\sin h \cos x}{h}$$

$$\frac{\sin x(\cos h - 1)}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h}$$

Vad skulle du kunna använda denna till? Känns det bekant?

den här är definitionen av derivatan för sin x

$$\sin x \cancel{\frac{(\cos h - 1)}{h}}^{0} + \cos x \cdot \cancel{\frac{\sin h}{h}}^{1}$$

$$\cos x$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

den här frågan var kanske inte riktigt på avancerade nivå