s. 246 # 13

Note Title 2013-12-04

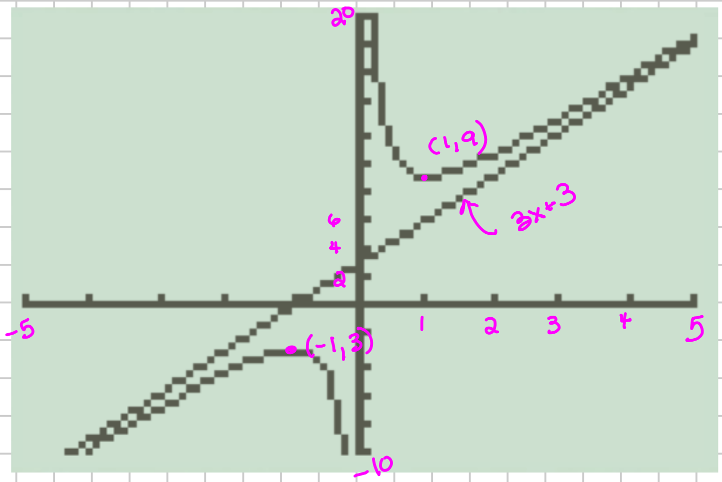
13 Skissa grafen till $y = \frac{3}{x} + 3x + 3$

asymptot : $x \neq 0$

när x blir stor går $\frac{3}{x}$ mot noll

och eftersom $x \neq 0$ finns det

en asymptot $3x+3$



när $x \overset{+}{\to} 0$ är y stor + längs 3/x

$x \overset{-}{\to} 0$ är y lite "

$x \overset{+}{\to} \infty$ är y stor längs 3x+3

$x \overset{-}{\to} \infty$ " lite län 3x+3

$$y' = -\frac{3}{x^2} + 3 = 0$$

$$\frac{3}{x^2} = 3$$

$$x = \pm 1$$

$$y(1) = 3+3+3 = 9$$

$$y(-1) = -3 - \cancel{3} + \cancel{3} = -3$$

s.246

17 Undersök om funktionen har något största och minsta värde.

a) $y = \frac{x}{x^2+1}$ b) $y = \frac{5}{1-\cos x}$

a) $y' = \frac{1(x^2+1) - x(2x)}{x^2+1} = 0$

$$x^2 + 1 - 2x^2 = 0$$

$$-x^2 = -1$$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1$$

$y(1) = \frac{1}{2}$ störst $y(-1) = \frac{-1}{2}$ minst

$$y' = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

$$y'' = \frac{-2x(x^2+1) - (1-x^2)(2x)}{x^2+1}$$

$$\frac{-2x^3 - 2x - (2x + 2x^3)}{x^2+1}$$

$$y'' \frac{-4x^3 - 4x}{x^2+1}$$

$y''(1) = \frac{-}{+} = -$ ∩ Max $y''(-1) = \frac{+4+4}{+} = $ ∪ min

b) $y = 5(1-\cos x)^{-1}$

$$y' = -5(1-\cos x)^{-2} (\sin x$$

$$= \frac{-5\sin x}{(1-\cos x)^2} = 0$$

$$= -5 \sin x = 0$$

$$x = 0 + 180°n$$

$$= 180°n$$

$$y(0) = \frac{5}{1-\cos 0} = \cancel{\frac{5}{0}}$$

$$y(180) = \frac{5}{1-\cos 180} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2} \text{ minst}$$

17b forts.

$$y' = \frac{-5\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

(produkt regel)

$$y' = \frac{-5\sin x}{(1-\cos x)^2} = -5\sin x\,(1-\cos x)^{-2}$$

$$y'' = -5\cos x(1-\cos x)^{-2} - 5\sin x \cdot 2(1-\cos x) \cdot \sin x$$

$$= -5(1-\cos x)[\cos x(1-\cos x) + 2\sin^2 x]$$

$\cos 180 = -1$
$\sin 180 = 0$

$$y''(180°) = -5(1+1)[-1(1+1)+0]$$

$$-10(-2) = +20 \quad \cup \text{ min}$$

~~30~~ Finns det något positivt värde på k så att $\int_0^k (4-x)\,dx < 0$? Motivera.

$$4x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^k \qquad 4k - \frac{k^2}{2} < 0$$

$$k\left(4 - \frac{k}{2}\right) = 0$$

$$4 \cdot 0 - \frac{0}{2} = 0 \qquad \cancel{k = 0} \qquad 4 - \frac{k}{2} = 0$$

$$4 = \frac{k}{2}$$

$$k = 8 \qquad 4 \cdot 8 - \frac{64}{2} < 0$$

$$k > 8 \qquad 28 - 32 < 0 \text{ ja}$$

~~37~~ 38 Undersök om det finns komplexa tal z så att

C

b) $z/\bar{z} = (1-\sqrt{3}\,i)/2$

37 a) Nej.

b) Ja, t ex $z = -\sqrt{3} + i$

b) $$\frac{a+bi}{a-bi} = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

$$2(a+bi) = (1-\sqrt{3}i)(a-bi)$$

$$2a + 2bi = a - bi - \sqrt{3}ai + \sqrt{3}b\overset{-1}{\cancel{i^2}}$$

$$a - 2a - \sqrt{3}b - bi - 2bi - \sqrt{3}ai = 0$$

$$-a - \sqrt{3}b = 0$$

$$a = -\sqrt{3}b$$

$$b = 1 \Rightarrow a = -\sqrt{3}$$

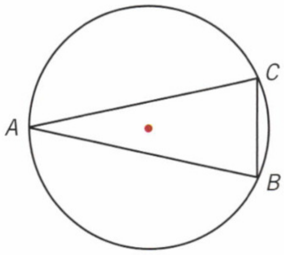
så t.ex $z = -\sqrt{3} + i$

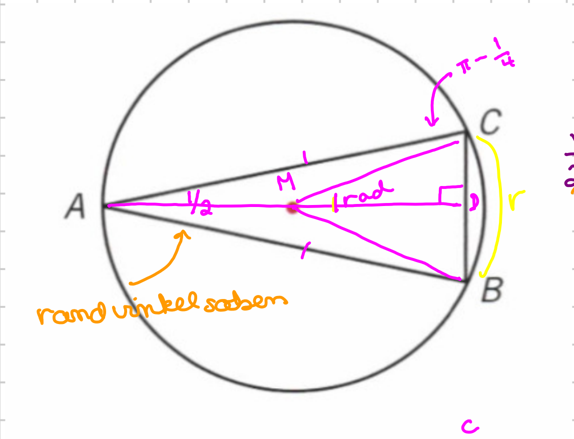
eller

$$b = \sqrt{3} \Rightarrow a = -\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = -3$$

$$z = -3 + \sqrt{3}i$$

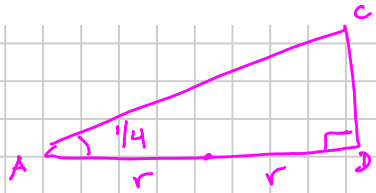
30 I en cirkel med radien r är en triangel ABC inskriven. Sidan AB är större än cirkelns radie och den är lika lång som sidan AC. Bågen BC är lika med cirkelns radie. Beräkna förhållandet mellan sträckan BC och sträckan AC utan att införa några närmevärden. Svara såväl exakt som med tre decimaler.





$\frac{v}{\cancel{2\pi r}} \cdot \cancel{2\pi r} = b = \cancel{r}$

$v = 1$



$\sin 0{,}25 = \frac{CD}{AC}$

$2CD = BC$

$CD = \frac{BC}{2}$

$\sin 0{,}25 = \frac{BC}{2AC}$

$2\sin 0{,}25 = \frac{BC}{AC} \approx 0{,}495$

2184 Funktionen $y = a\sin x + (a+1)\cos x$ är given.

a) Bestäm det positiva talet a så att funktionens största värde blir 29.

b) Ange det minsta positiva x-värde för vilket y antar sitt största värde 29.

$y = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + v)$

$y = a\sin x - b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x - v)$

Då $a > 0$, $b > 0$, $\tan v = \frac{b}{a}$, $0° < v < 90°$.

a) $y = \sqrt{a^2 + (a+1)^2}\ \sin(\cancel{2a + v}) = 29$

$\left(\sqrt{a^2 + a^2 + 2a + 1}\right)^2 = 29^2$

$2a^2 + 2a + 1 = 841$

$2a^2 + 2a - 840 = 0$

$2(a^2 + a - 420) = 0$

$2(a + 21)(a - 20) = 0$

$a = 20$

b) minsta värdet är när $a = -21$

$a \Rightarrow a = -21$

$b \Rightarrow a + 1 = -20$

$\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) =$

$\tan^{-1}\left(\frac{-20}{-21}\right) \approx 43{,}6°$

3327 En damm rymmer 500 000 liter. Dammen innehåller y liter gift efter t år.

Antag att giftet är jämnt fördelat i hela dammen. Varje år rinner en tiondel av dammens vatten ut samtidigt som samma mängd vatten med totalt 1 liter gift fyller på.

Ställ upp en differentialekvation som beskriver hur mängden gift ändras.

representerar 100 %

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0{,}1y$$

förändring varje år

s.246 Lös

20. $z - \bar{z} + \frac{1}{z} - i = 0$

$$\cancel{a} + bi - (\cancel{a} - bi) + \frac{1}{a+bi} - i = 0$$

$$2bi + \frac{1}{(a+bi)(a-bi)}(a-bi) - i = 0$$

$$2bi + \frac{a-bi}{a^2 - b^2i^2} - i = 0$$

$$2bi + \frac{a-bi}{a^2+b^2} - i = 0$$

$$2bi - i + \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{bi}{a^2+b^2} = 0$$

$$i\left(2b - 1 - \frac{b}{a^2+b^2}\right) = 0$$

$$\frac{a}{a^2+b^2} = 0$$

$$a = 0$$

$$\frac{b}{b}2b - 1 - \frac{\cancel{b}}{b^{\cancel{2}}} = 0$$

$$\frac{2b^2 - b - 1}{b} = 0$$

$$2b^2 - \underbrace{2b + b}_{} - 1$$

$$2b(b-1) + 1(b-1)$$

$$(2b+1)(b-1) = 0$$

$$b = -\frac{1}{2} \qquad b = 1$$

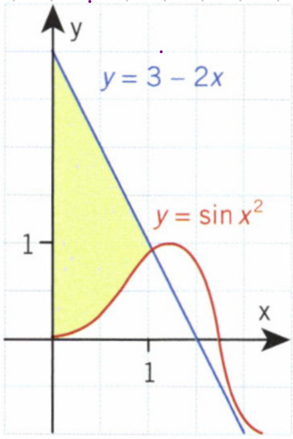
$$\frac{2b^2 - b - 1}{2} = 0$$

$$b^2 - \frac{b}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

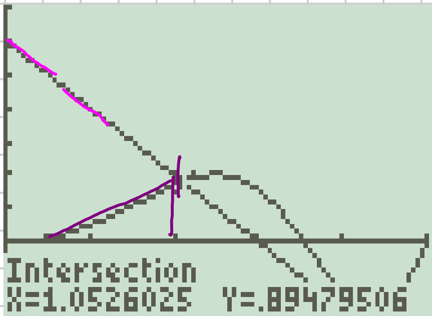
$$b = +\frac{1}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}} = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$= \frac{4}{4} \qquad = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

3427 Bestäm det färgade områdets area.



$3-2x = \sin^2 x$

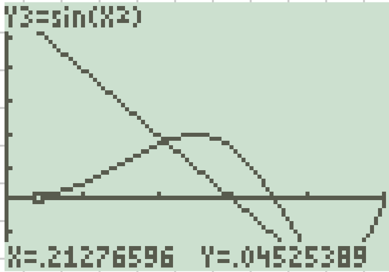


gränsen

$$\int_0^1 3-2x\,dx - \int_0^1 \sin x^2\,dx$$

area av en triangel

$$3x - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\underbrace{(1-0,2)}_{\text{bas}}\cdot\underbrace{0,9}_{h}$$



$$3-1 - 0,36$$

1,64 ae

tillräckligt nära

(vi kan inte integrera $\sin(x^2)$ än)